بردار و مختصات

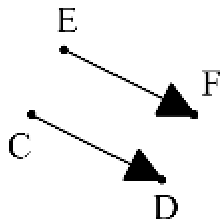
یاد آوری:

بردار: در ریاضی به پاره خط جهت دار، بردار می گوییم.

بردار OA را با $\overrightarrow{OA}$ نشان می دهیم.

تعریف: دو بردار وقتی برابرند که هم راستا، هم اندازه و هم جهت باشند.

مانند بردارهای $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{EF}$:



تعریف: دو بردار را قرینه می گوییم وقتی هم راستا و هم اندازه باشند،

ولی جهت هایشان عکس یکدیگر باشد. مانند دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$

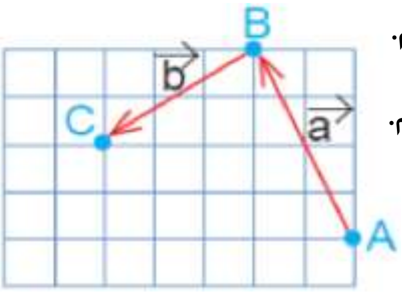
در شکل روبرو:

لطفا مباحث مختصات بردار و بردار انتقال از کتاب درسی هفتم جهت یاد آوری مطالعه گردد.

جمع بردارها

یک مثال: در شکل زیر ابتدا از نقطه ی A بردار انتقال $\vec{a}$ به نقطه ی B می رویم.

یعنی ۲ واحد به سمت چپ (افقی) و ۴ واحد به سمت بالا (عمودی) حرکت می کنیم.

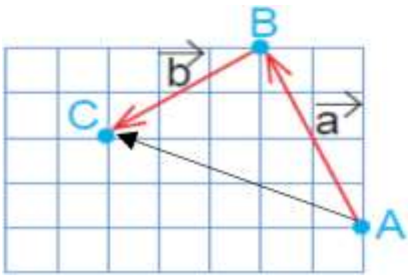


پس بردار انتقال $\vec{a}$ برابر است با : $\vec{a}=\begin{bmatrix}-۲\\ ۴\end{bmatrix}$ سپس با بردار انتقال $\vec{b}$ ،

از نقطه ی B به نقطه ی C می رویم: $\vec{b}=\begin{bmatrix}-۳\\ -۲\end{bmatrix}$.

نقطه ی A با بردار $\overrightarrow{AC}$ به طور مستقیم به نقطه ی C

منتقل شده است. نام آن را بردار انتقال $\vec{c}$ می گذاریم.



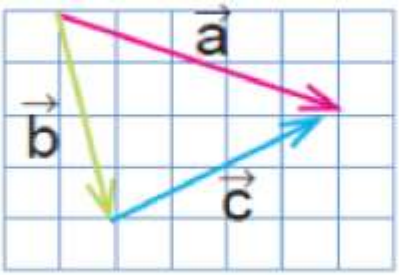
می توان گفت $\vec{c}$ کار دو بردار انتقال $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را انجام

می دهد. به بردار $\vec{c}$ بردار **برآیند** یا **حاصل جمع** می گویند.

اگر بردار های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با هم جمع کنیم، داریم:

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{bmatrix} -۲ \\ +۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۳ \\ -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۵ \\ +۲ \end{bmatrix}$$

که حاصل آن طبق شکل بالا برابر $\begin{bmatrix} -۵ \\ +۲ \end{bmatrix}=\vec{c}=\overrightarrow{AC}$ است. بنابراین می توان یک تساوی برداری به صورت $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ نوشت. که تساوی مختصاتی آن هم در بالا نوشته شد.



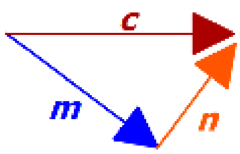
مثال ۱: در شکل روبرو؛ بردار $\vec{a}$ حاصل جمع دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ است

جمع برداری : $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$

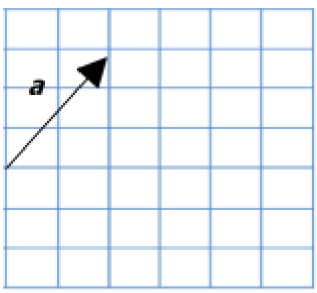
و اگر مختصات آنها را از روی شکل بنویسیم، داریم:

جمع مختصاتی: $\begin{bmatrix} +۱ \\ -۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} +۴ \\ +۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} +۵ \\ -۲ \end{bmatrix}$

مثال۲: برای شکل زیر یک جمع برداری بنویسید.



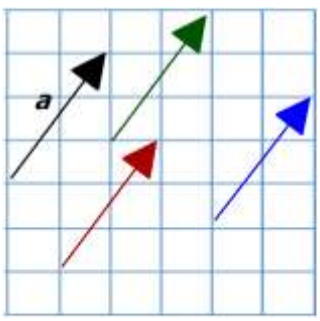
پاسخ: همان طور که می بینیم؛ بردارهای $\vec{m}$ و $\vec{n}$ دنبال هم رسم شده اند، یعنی بردار $\vec{n}$ از انتهای بردار $\vec{m}$ رسم شده است و بردار $\vec{c}$ از اتصال ابتدای $\vec{m}$ به انتهای $\vec{n}$ بدست آمده است پس داریم: $\vec{m}+\vec{n}=\vec{c}$



نکته: بردارهای مساوی را می توان از نقطه های شروع مختلف رسم کرد.

مثلا می خواهیم دو بردار مساوی بردار $\vec{a}$ در شکل روبرو رسم کنیم.

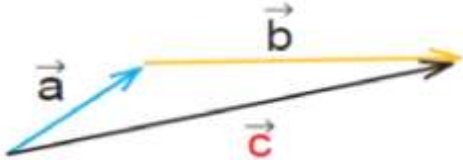
مختصات $\vec{a}$ به صورت $\vec{a}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ است. پس مختصات بردارهای رسم شده هم باید همین باشد:



می توان بردارهای دیگری نیز مساوی بردار $\vec{a}$ رسم کرد.

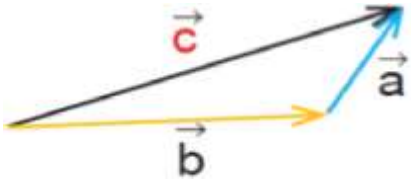
حال با استفاده از نکته بالا می خواهیم حاصل جمع بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را رسم کنیم:

ابتدا دو بردار را دنبال هم رسم می کنیم، سپس انتهای $\vec{a}$ را به ابتدای $\vec{b}$ وصل می کنیم بردار حاصل جمع به دست می آید. آن را $\vec{c}$ می نامیم:



پس: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

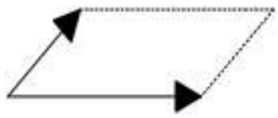
توجه: جمع بردارها خاصیت جابجایی دارد: یعنی اگر در شکل بالا ابتدا $\vec{b}$ را رسم کنیم و سپس $\vec{a}$ را رسم کنیم باز هم بردار حاصل جمع، بردار $\vec{c}$ خواهد بود:



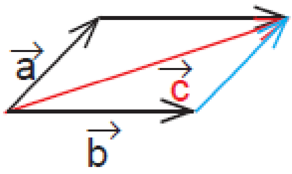
$$\vec{b}+\vec{a}=\vec{c}$$

روشی که در بالا برای رسم بردار حاصل جمع گفته شد، روش **مثلثی** نام دارد.

روش دیگر برای رسم حاصل جمع دو بردار، روش **متوازی الاضلاع** نام دارد؛ به این صورت که دو بردار را از یک نقطه ی دلخواه به صورت اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع



رسم می کنیم، متوازی الاضلاع را تشکیل می دهیم (می دانیم که ضلع های روبروی متوازی الاضلاع با هم برابرند)



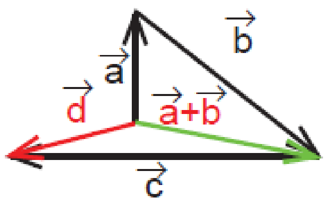
و قطر متوازی الاضلاع، بردار حاصل جمع خواهد بود: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

برای بدست آوردن حاصل جمع سه بردار، ابتدا حاصل جمع دو بردار را به دست می آوریم و سپس بردار حاصل جمع را با بردار سوم جمع می کنیم:

مثال۳: حاصل جمع بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را بدست آورید.

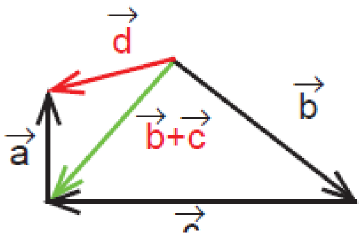
پاسخ: ابتدا بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را بدست می آوریم

سپس آن را با $\vec{c}$ جمع می کنیم:



$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{d}$$

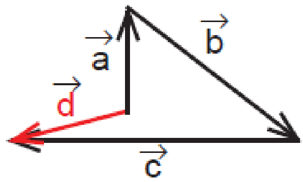
گفتیم که در جمع، ترتیب بردارها اهمیتی ندارد، پس می توان ابتدا $\vec{b}+\vec{c}$ را بدست آورد، سپس آن را با $\vec{a}$ جمع کرد:



$$(\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}=\vec{d}$$

همان طور که می بینید باز هم بردار حاصل جمع $\vec{d}$ بدست می آید.

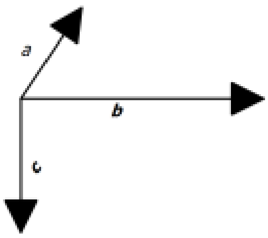
راه حل سوم و البته آسان تر آن است که سه بردار را دنبال هم رسم کنیم (مانند شکل زیر) و سپس ابتدای اولی را به انتهای آخری وصل کنیم:

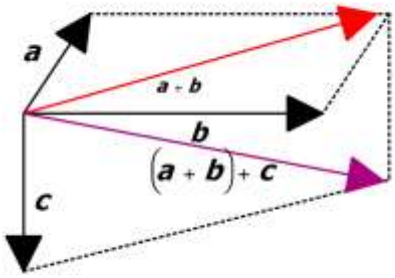


$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$$

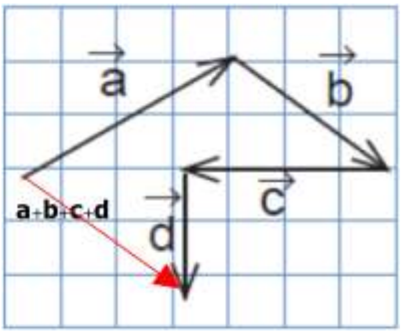
مثال۴:

۱- حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.



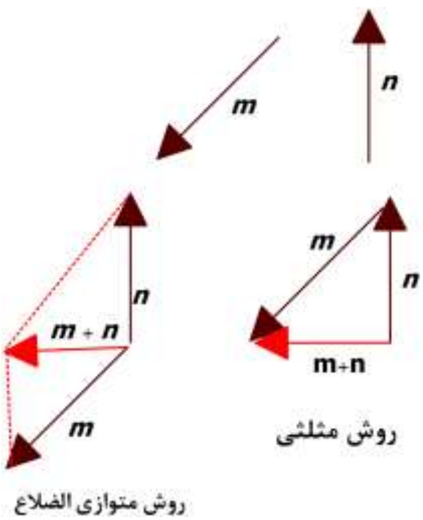


الف) بردار قرمز حاصل جمع بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است و بردار بنفش بردار $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ است. (روش متوازی الاضلاع)

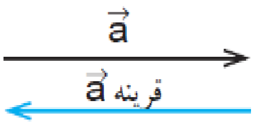


ب) همان طور که می بینید برای بدست آوردن بردار حاصل جمع، کافی است ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل کنیم.

ج) در این قسمت برای تمرین بیشتر از هر دو روش استفاده کردیم.



نکته: جمع بردارهای قرینه، برابر بردار صفر است.



آن را با $\vec{o}$ نشان می دهیم و مختصات آن به صورت $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ است.

قرینه ی $\vec{a}$ را با $-\vec{a}$ نشان می دهیم: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$